# Лабораторная работа №5

# Тема: Численное решение дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.1) |

в котором  есть производная функции 

Требуется найти на отрезке  решение , удовлетворяющее начальному условию

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.2) |

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности решения выполнены. Для решения используем метод Эйлера (метод первого порядка точности) и метод Рунге-Кутта (метод четвертого порядка точности) с шагом *h* и *2h*. Необходимо отметить, что получаемые на основе указанных методов решения могут сильно различаться, ввиду того, что метод Эйлера, имеющий только первый порядок точности, используется, как правило, только для оценочных расчетов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутта  определена в работе [2].

В соответствии с используемыми методами решение на -м шаге (значение функции ) определяется выражениями

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.3) |

для метода Эйлера

|  |  |
| --- | --- |
| , | (5.4) |

для метода Рунге-Кута четвертого порядка.

В формулах (5.3) и (5.4)

, ,

, .

Погрешность представления решения определяется выражением

|  |  |
| --- | --- |
| . | (5.5) |

В выражениях (5.3)-(5.5)  ‑ шаг разбиения отрезка .

**Задание 1**

Написать программу решения дифференциального уравнения  методом Эйлера на отрезке  с шагом *h* и *2h* и начальным условием . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5. Сравнить полученные результаты решения.

**Задание 2**

Написать программу решения дифференциального уравнения  
 методом Рунге-Кутта на отрезке  с шагом *h* и *2h* и начальным условием . Оценить погрешность полученных решений формуле (5.5). Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5.

Примерный фрагмент выполнения лабораторной работы

Выполнить задание 1 при следующих условиях

, , ,  .

Находим число точек, в которых определяется решение дифференциального уравнения, по формуле . В примере число точек равно 10.

Определяем цикл по переменной .

Переменную  определяем следующим выражением .

Начальное значение решения определяем как .

Значение искомого решения при  определяем следующей формулой

.

Ниже приведены значения и полученное решение 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* |
|  | 2,0 | 1,0 |
|  | 2,1 | 1,1 |
|  | 2,2 | 1,196 |
|  | 2,3 | 1,287 |
|  | 2,4 | 1,372 |
|  | 2,5 | 1,451 |
|  | 2,6 | 1,524 |
|  | 2,7 | 1,589 |
|  | 2,8 | 1,647 |
|  | 2,9 | 1,699 |
|  | 3,0 | 1,744 |

2. Выполнить задание 2 при следующих условиях

, , ,  .

Находим число точек, в которых определяется решение дифференциального уравнения, по формуле . В примере число точек равно 10.

Определяем цикл по переменной .

Переменную  определяем следующим выражением .

Начальное значение решения определяем как .

Значение искомого решения при  определяем следующей формулой

.

Ниже приведены значения и полученное решение 

, , ,

, .

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *x* | *y* |
|  | 2,0 | 1,0 |
|  | 2,1 | 1,097 |
|  | 2,2 | 1,189 |
|  | 2,3 | 1,277 |
|  | 2,4 | 1,361 |
|  | 2,5 | 1,441 |
|  | 2,6 | 1,518 |
|  | 2,7 | 1,593 |
|  | 2,8 | 1,665 |
|  | 2,9 | 1,735 |
|  | 3,0 | 1,802 |

Таблица 5

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | Функция |  |  |  |  |
| 1 |  | 2 | 3 | 1 | 0.1 |
| 2 |  | 3 | 4 | 1 | 0.1 |
| 3 |  | 0 | 1 | 2 | 0.1 |
| 4 |  | 2 | 3 | 1 | 0.1 |
| 5 |  | 1 | 2 | 1 | 0.1 |
| 6 |  | 0 | 1 | 1 | 0.1 |
| 7 |  | 0 | 1 | 2 | 0.1 |
| 8 |  | 0 | 1 | 1 | 0.1 |
| 9 |  | 2 | 3 | 2 | 0.1 |
| 10 |  | 0 | 1 | 3 | 0.1 |

**Контрольные вопросы**

1. Проверить выполнение условия теоремы существования и единственности решения для дифференциального уравнения.

2. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?

3. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения, полученное по по методу Эйлера?

4. Какой геометрический смысл имеет решение дифференциального уравнения методом Эйлера?

5. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутта?

6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта?

7. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчета?